数项级数:

Cauchy收敛准则:

$\sum x_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N>0, \forall n>N$ 及对 $\forall p$

对 $\forall p\in Z^+$, 均有 $|x_{n+1}+\cdots+x_{n+p}|<\varepsilon$.

$\sum x_n$ 发散 $\Leftrightarrow \exists \quad =|S_{n+p}-S_n|$

$\sum x_n$ 发散 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0, \forall N>0, \exists n_0>N$ 及 $p_0\in N^*$,

有 $|S_{n_0+p_0}-S_{n_0}|=|x_{n_0+1}+\cdots+x_{n_0+p_0}|\geq\varepsilon_0$

$\sum x_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

正项级数判别法

1) 比较: $\exists A>0$, s.t. $x_n\leq Ay_n$.

若 $\sum y_n$ 收敛, 则 x_n

2) 根式 (Cauchy) $r=\lim \sqrt[n]{x_n}$, $r<1$ 收敛, $r>1$ 发散, $r=1$ 不定

3) 比式 (d'Alembert) $r=\lim\frac{x_{n+1}}{x_n}$, ...

④ 若 f 在 $[1,+\infty)$ 上非负单减, 则 $\sum f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 有相同敛散性

Abel 变换: $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k=a_nB_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k$

级数的A-D判别法: 满足以下条件之一则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛

(1) Abel: $\{a_n\}$ 单调有界, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

(2) Dirichlet: $\{a_n\}$ 单调趋于0, $\sum b_n$ 的部分和数列有界.

若 $\sum x_n$ 绝对收敛, 则它的任意重排也绝对收敛, 且和不变

函数项级数

一致收敛的定义: $f_n(x)\overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$

~~若对 $\forall\varepsilon>0, \exists N>0$, 当 $n>N$ 时,~~

$\{f_n\}$ 一致收敛于 $f \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)>0$, 当 $n>N$ 时, $\forall x\in D$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$N=N(\varepsilon)$ 与 x 无关, 仅与 ε 有关

$\{f_n\}$ 不一致收敛于 $f \Leftrightarrow$

$\exists\varepsilon_0>0$, 对 $\forall N>0, \exists n_0>N$ 及 $x_0\in D$ 有 $|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|\geq\varepsilon_0$.

闭内闭一致收敛: f_n 在 (a,b) 上任意闭区间 $[\alpha,\beta]$ 均一致收敛于 f.

若 $\sum u_n(x)$ 的部分和函数 $S_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$, 则称 $\sum u_n(x)$ 一致收敛于 f

Cauchy:

$\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \exists N>0, \forall m,n>N, \forall x\in D$ 有 $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

$\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛 $\Leftrightarrow \forall$

$\forall\varepsilon>0, \exists N>0$, 当 $m>n>N, \forall x\in D$, 有 $|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_m(x)|<\varepsilon$

定义距离 $d(f_n,f)=\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|$,

f_n 收敛于 $f \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}d(f_n,f)=0$.

① $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

② $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$

③ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$

④ $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)$

⑤ $\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+o(x^5)$ $+\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}$

⑥ $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$ $=\sum\limits_{n=0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

⑦ $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$

⑧ $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+o(x^3)$

Weierstrass判别法:

$\exists n_0>0, \forall n>n_0, \forall x\in D$ 有 $|u_n(x)|\leq a_n$ 且 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\sum u_n(x)$ 收敛

~~A-D判别法: $\sum u_n(x)v_n(x)$ 一致收敛~~

~~① Abel: ① $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛~~ ②

A-D判别法: $\sum a_n(x)b_n(x)$ 一致收敛

Abel: ① $a_n(x)$ 对每个固定的 $x\in D$ 关于 n 单调 ② $\{a_n(x)\}$ 一致有界

③ $\sum b_n(x)$ 一致收敛

Dirichlet: ① $a_n(x)$ 关于 n 单调且一致收敛于0.

② $\sum b_n(x)$ 的部分和序列一致有界.

一致收敛的函数列与函数项级数的性质 连续性 逐项可积 逐项可导

① 若 $\{f_n\}\overset{D}{\rightrightarrows} f$, 所有 f_n 均连续, 则 f 在 D 上也连续

$\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\sum u_n(x)=\sum\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)$

若 $\{f_n\}$ 连续, 但 f 不连续, 则 $\{f_n\}$ 不一致收敛

若 $\{f_n\}$ 连续且在 D 上内闭一致收敛, 则 $f(x)$ 在 D 上连续

② 若 $f_n\overset{D}{\rightrightarrows} f$ 且 f_n 均连续, 则 $\lim\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\lim f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

(积分与极限可交换)

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\sum u_n(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$

③ 可微: $\{f_n(x)\}$ 满足在 D 上)

(1) $f_n(x)$ 有连续导函数

(2) $\{f_n(x)\}$ 点态收敛于 $f(x)$

(3) $\{f_n'(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$ 求导与极限可交换.

则 $\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}(\lim f_n(x))=\lim\frac{d}{dx}(f_n(x))$

$\left(\frac{d}{dx}\sum\limits^{\infty}u_n(x)=\sum\limits^{\infty}\frac{d}{dx}u_n(x)\right)$

$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx\right|=\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\frac{\left|\cos(n+\frac{1}{2})x-\cos\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

幂级数，$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$，$\lim\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$

收敛半径：$r=\frac{1}{l}$ 或 $r=\frac{1}{\rho}$

即对 $\sum a_n x^n$，$|x|<r$ 时收敛，$|x|>r$ 时发散，$|x|=r$ 时单独判断

性质：（在收敛域的内闭区间上一致收敛）

① 幂级数在其收敛域上连续.

② …… 在内闭区间上可逐项积分

③ …… 在收敛域收敛域上可逐项求导.

逐项积分后收敛半径不变，但收敛域可能扩大（端点）

求导 缩小

$1+x+x^2\cdots=\frac{1}{1-x}$

$1-x+x^2\cdots=\frac{1}{1+x}$

$1-x^2+x^4\cdots=\frac{1}{1+x^2}$

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \Rightarrow S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ 故 $S(x)=-\ln(1-x)$

$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n} \Rightarrow xS(x)=-x\ln(1-x)$

$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \Rightarrow \int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1$

故 $S(x)=(\frac{1}{1-x}-1)'=\frac{1}{(1-x)^2}$

~~$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)''+x\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'$~~

Taylor 级数：$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Fourier级数

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=\pi\cdot\delta_{m,n}$

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx=0$，$m\ge 0, n\ge 1$

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx=2\pi\cdot\delta_{m,0}$ $\delta_{m,n}=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\ne n\end{cases}$

正弦级数 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$

余弦级数 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

2T周期：

$\begin{cases}a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,dx\\ b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx\end{cases}$

Fourier 收敛于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

Dirichlet：$f(x)$ 在 x 邻域 $O(x,\delta)$ 上按段光滑或分段单调有界

③ 在 x 点处两个单侧导数都存在，$f'_+(x)$，$f'_-(x)$.（无须相等）

必

性质 $\begin{cases}\text{逐项可积}\\ \text{逐项可导.}\end{cases}$

$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

常见积分：

① $I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}$

② $I_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

③ $I_3=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{2}{n^2}$

④ $I_4=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}+\frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1]$

欧氏空间上的极限和连续.

点集 S，补集 S^c，内部 S^o，边界 ∂S

孤立点：邻域内仅有自己 $\in S$.

聚点：任意邻域均有无限个点属于 S.

开集：所有点都是内点.

闭集：S 包含其所有聚点 ~~边界也在 S 中~~

定理 ① Cantor闭区域套.

$S_1\supset S_2\supset S_3\supset\cdots\supset S_k\supset S_{k+1}\supset\cdots$，$\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}S_k=0$

有唯一点 ξ 属于 $\bigcap_{k=1}^{\infty}S_k$

② $\mathbb{R}^n$ 上有界点列 $\{x_k\}$ 必有收敛子列

③ 点列 $\{x_k\}$ 收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists K>0,\forall k,l>K$ s.t. $|x_k-x_l|<\varepsilon$ (Cauchy)

④ S 是紧集 $\Leftrightarrow$ S 的任意开覆盖 $\{U_i\}$ 中必有一个有限子覆盖"盖住"S $\bigcup_i U_i\supset S$

在 $\mathbb{R}^n$ 上，S 是紧集 $\Leftrightarrow$ 有界闭集

n重极限与n次极限无必然的联系

当n重极限存在时，若某些n次极限存在，则它们必然与重极限相等.

连续映射将紧集映到紧集，将连通集映到连通集

在紧集上 $\begin{cases}\text{有界}\\ \text{有最值}\\ \text{一致连续}\end{cases}$

判别某三角函数是否是Fourier级数

① 若一致收敛，则是

② 若 $\sum(a_n^2+b_n^2)$ 发散，则不是

Bessel不等式

$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$

必要条件：$\lim a_n=\lim b_n=0$

$\lim\sum\frac{b_n}{n}=0$

多元微分.

$f(x,y)$在(x_0,y_0)可微$\Leftrightarrow$

$$\lim_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\(x,y)\to(x_0,y_0)}}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x\Delta x-f_y\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0.$$

全微分 $dz=f_x dx+f_y dy$

可偏导 $\xrightarrow{\text{某邻域上偏导数有界}}$ 连续

可偏导 $\xrightarrow{\text{偏导数连续}}$ 可微

可微 $\Rightarrow$ 可偏导

可微 $\Rightarrow$ 连续

$g: D_f\to\mathbb{R}^2$

$(u,v)\to(x,y)$

$(g(u,v))$

对$z=f(x,y)$, $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, 有

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

要求：g可求偏导，f~~要~~可微（不可减弱为可偏导）

一阶全微分具有不变性 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

形式

方向导数：

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma \quad (\text{若 } u=f(x,y,z)\text{可微})$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ → 方向余弦

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi \quad (z=f(x,y)\text{可微})$$

注意要把l的方向向量单位化

方向导数的存在性与是否连续无必然联系

可微：以任意方式逼近

梯度：$\mathrm{grad}f$或$\nabla f=(f_x,f_y,f_z)$

向量值函数的可微性：

导数，即Jacobi矩阵 $J_f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}$

f在$\vec{x}$可微$\Leftrightarrow$所有分量$f_1\cdots f_m$在$\vec{x}$均可微，

即Jacobi矩阵中每个元素都存在.

对$f(g(\vec{x}))$求导，$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$ $\begin{cases}u=u(s,t)\\v=v(s,t)\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}$$

若f_{xy}与f_{yx}均存在且在(x_0,y_0)连续，且$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

凸区域  非凸 

任意两点所连线段上的点也在区域内

（不完全在）

中值定理：

设$f(x,y)$在凸区域D上可微，则对D上任意两点、(x_0,y_0)与$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，至少有一个$\theta\in(0,1)$，使

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x+f_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y$$

若f_x与f_y在D上恒为0，则f在D上为常值函数.

Taylor公式

若$f(x,y)$在(x_0,y_0)的某邻域内有$k+1$阶连续偏导数.

则有$\exists\theta\in(0,1)$,

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)$$

$$+\cdots+\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+$$

$$=① +\frac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)+\frac{1}{(k+1)!}(\Delta x\cdots)^{k+1}\cdots$$

或 $\sum\cdots+o\left((\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})^k\right)$

条件极值

若极值存在且可偏导，则$f_x=f_y=0$，即$\mathrm{grad}f=(0,0)$，（驻点）

若(x_0,y_0)为驻点，记$A=f_{xx}$, $B=f_{xy}$, $C=f_{yy}$，有二阶连续偏导数

海塞(Hesse)矩阵 $H_f=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$,

若H_f正定：$|H|>0$ $(AC-B^2>0)$，$|A|>0$，则(x_0,y_0)为极小值.

若H_f负定：$|H|>0$，$|A|<0$，$\cdots\cdots$ 极大值

不定：$|H|<0$ $(AC-B^2<0)$， 则不是极值点、

半正(负)定 $(AC-B^2=0)$ 可能有，也可能没有极值

隐函数存在定理：设F在D上连续.若

① $F(x_0,y_0)=0$，$P_0(x_0,y_0)$

② F在D内有连续偏导数F_y.

③ $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

则(i)在P_0的~~某~~某邻域$U(P_0)$内，由$F(x,y)=0$唯一确定隐函数$y=f(x)$

$y_0=f(x_0)$

(ii) $y=f(x)$在$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$内连续

若还有连续偏导数F_x，则$f(x)$在$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$内连续可导，

且$f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ $\left(z=z(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}\right)$

（只适用于$F(x,y,z)=0$，不适用于$F(x+z,x+y^2,xyz)=0$）

设 F,G 在 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 某个邻域内：

① $F(P_0)=G(P_0)=0$

② F,G 有一阶连续偏导数.

③ Jacobi 行列式 $J=\begin{vmatrix} F_u' & F_v' \\ G_u' & G_v' \end{vmatrix}\neq 0$.

则确定唯一确定二个二元函数 $u=(x,y)$, $v=(x,y)$，都有一阶连续偏导数，且 $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}$

偏导数几何应用

平面曲线 $F(x,y)=0$,

切 $F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)=0$

法 $F_y(x-x_0)-F_x(y-y_0)=0$.

$L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 切线 $\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$

$L:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 秩 $\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}=2$

切向量 $\left\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\}$

特殊曲面 $z=f(x,y)$, $P_0(x_0,y_0)$, $z_0=f(P_0)$

切平面方程 $z-z_0=f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)$

法线方向向量 $(f_x,f_y,-1)$

一般曲面 $F(x,y,z)=0$. $P_0(x_0,y_0,z_0)$

法向量: $\vec{n}=\{F_x,F_y,F_z\}$，法线 $\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z}$

切平面 $F_x(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$.

参数方程 $S:\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$ $P_0(x_0,y_0,z_0)$ $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$ 秩为2.

法向量 $\vec{n}\left\{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(P_0),\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(P_0),\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(P_0)\right\}$

条件极值

在限制条件 $\varphi_k(x_1\cdots x_n)$ $(k=1\cdots m)$ 下求目标函数 $f(x_1\cdots x_n)$ 的极值，$\varphi_k(x_1\cdots x_n)$ 都在 D 内有连续偏导数

令 $L(x_1\cdots x_n,\lambda_1\cdots\lambda_m)=f(x_1\cdots x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1\cdots x_n)$

解 $\begin{cases} 0=L_{x_1}=f_{x_1}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(\varphi_k)_{x_1}' \\ 0\ \vdots \\ 0=L_{x_n}=f_{x_n}+\sum \\ 0=L_{\lambda_1}=\varphi_1=0 \\ 0=L_{\lambda_m}=\varphi_m \end{cases}$

常用积分公式

① $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}a^2$

② $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2} & (n=2m) \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} & (n=2m+1) \end{cases}$

Wallis公式 $\lim\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow \lim\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\pi}$

重积分

性质: ①线性 ②区域可加性, ③保序性

④ m,M 分别为下,上确界 $mV\le\int_\Omega f\,dV\le MV$

⑤ 绝对可积, $\left|\int_\Omega f\,dV\right|\le\int_\Omega|f|\,dV$.

⑥ f,g 均可积, 则 $f\circ g$ 也在 Ω 上可积.

⑦ 若 g 在 Ω 上不变号, 则 $\exists\mu\in[m,M]$ (积分中值)

$\int_\Omega f\cdot g\,dV=\mu\int_\Omega g\,dV$.

若 f 在 Ω 上连续还有 $\exists\xi\in\Omega$, 使 $\int_\Omega f\cdot g\,dV=f(\xi)\int_\Omega g\,dV$

变量代换:

$\iint_{T(D)}f(x,y)\,dxdy=\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$

常见代换 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=r$

$\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$ $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=abr$

柱坐标: $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|=r$

球坐标: $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$ $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=r^2\sin\varphi$

广义球坐标 $\begin{cases} x=ar\sin\varphi\cos\theta \\ y=br\sin\varphi\sin\theta \\ z=cr\cos\varphi \end{cases}$ $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=abcr^2\sin\varphi$

第一类曲线积分

$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$

当 $\begin{cases} x=t \\ y=y(t) \end{cases}$ 时, $=\int_\alpha^\beta f(x,y(x))\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$

~~第二类曲线积分~~

当 $r=r(\theta)$ 时, $\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$

第二类曲线积分.

$\begin{cases} dx=ds\cdot\cos\alpha \\ dy=ds\cdot\cos\beta \\ dz=ds\cdot\cos\gamma \end{cases}$ $\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds$

$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]\,dt$.

D可求面积 $\Leftrightarrow$ ∂D 面积为0

有界闭区域上的连续函数一定可积

$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

第一类曲面积分

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\vec r_u(u,v)\times\vec r_v(u,v)|dudv$$

当 $z=z(x,y)$ 时,

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

$$d\vec S=dS(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(dydz,dzdx,dxdy)$$

第二类曲面积分

$$\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

若 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$，法向量 $\vec n=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\neq 0$

~~则 $\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\pm$~~

$$\iint_\Sigma \vec F\cdot\vec n dS=\pm\iint_D \vec F(\vec r(u,v))\cdot(\vec r_u(u,v)\times\vec r_v(u,v))dudv$$

$$=\pm\iint_D\left[P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]dudv.$$

若 $z=z(x,y)$，$\vec n=(-z_x',-z_y',1)$

$$\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iint_D[-P z_x'-Q z_y'+R]dxdy$$

< 法向量向上取正，反之取负

Green公式

若 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续且有连续偏导数,

则 $\int_{\partial D}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

其中 ∂D 取诱导定向: D 总在 ∂D 左边，所有边界都要算.

D 的面积: $\sigma(D)=\int_{\partial D}xdy=-\int_{\partial D}ydx=\frac{1}{2}\int_{\partial D}xdy-ydx$

下列命题等价

① 对 D 中任意分段光滑闭曲线 L, 有 $\oint_L Pdx+Qdy=0$.

② $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关, 只与起点和终点有关.

③ $\exists U$, $dU=Pdx+Qdy$.

④ 在 D 内处处成立 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

Green: 第二类曲线积分与二重积分 二维

~~Stokes~~ Gauss: 第二类曲面积分与三重积分，三维

Stokes: 第二类曲线积分与三重积分，三维

Gauss公式

设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中分片光滑曲面围成的有界闭区域, P,Q,R 在 Ω 上有连续偏导数, 则

$$\iint_{\partial\Omega}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$\partial\Omega$ 的定向取外侧(诱导定向)

利用Gauss公式计算体积:

$$V=\iiint_\Omega dxdydz=\iint_{\partial\Omega}xdydz=\iint_{\partial\Omega}ydzdx=\iint_{\partial\Omega}zdxdy$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}xdydz+ydzdx+zdxdy.$$

应用Green和Gauss公式时, 可能需要在"奇点"周围挖洞

Stokes公式

设 Σ 为 $\mathbb{R}^3$ 中分片光滑曲面, $\partial\Sigma$ 为分段光滑曲线, 若 P,Q,R 在 Σ 上有连续偏导数, 则

$$\oint_{\partial\Sigma}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_\Sigma[\cdots\cos\alpha+\cdots\cos\beta+\cdots\cos\gamma]dS$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

$\partial\Sigma$ 取诱导定向

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为单连通区域, P,Q,R 在 Ω 连续且有连续偏导数

下列命题等价

① 对 Ω 内任一闭曲线 $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0$

② $\int_L Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关

③ 在 是某一函数 U 的全微分

④ $\forall(x,y,z)\in\Omega$, 均有 $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$