积空间

$V_1\times\cdots\times V_m=\{(v_1,\cdots,v_m)\mid v_i\in V_i\}$，记为 $\prod_{i=1}^{n}V_i=V_1\times\cdots\times V_n$

注意：$P_2(\mathbb{R})=\mathbb{R}[x]_3=\{a+bx+cx^2\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$

$\dim(V_1\times\cdots\times V_m)=\dim V_1+\cdots+\dim V_n$

定理：设 $\Gamma: U_1\times\cdots\times U_m\to U_1+\cdots+U_m$

$(u_1,\cdots,u_m)\mapsto u_1+\cdots+u_m$

则 ① Γ是线性映射

② $U_1+\cdots+U_n=U_1\oplus\cdots\oplus U_m \iff \Gamma$为单射 $\iff \Gamma$为同构

$U_1+\cdots+U_m$为直和 $\iff \dim(U_1+\cdots+U_m)=\dim U_1+\cdots+\dim U_m=\sum_{i=1}^{m}\dim U_i$

仿射子集：设$V(F)$，$U\le V$，$v\in V$，定义为

$v+U=\{v+u\mid u\in U\}$，称$v+U$平行于U（$v+U\,/\!/\,U$）

商空间：$U\le V$，则 $V/U=\{v+U\mid v\in V\}$

定理：$U\le V$，$v,w\in V$，下列条件等价

(1) $v-w\in U$ ② $v+U=w+U$ ③ $(v+U)\cap(w+U)\neq\varphi$

商映射 $\pi: V\to V/U$，$\pi(\alpha)=\alpha+U$

$\mathrm{null}\,\pi=U$，$\dim V/U=\dim V-\dim U$.

若A非空，$A\le V$，则A为仿射子集 $\iff \forall w,v\in A,\lambda\in F$
均有 $\lambda v+(1-\lambda)w\in A$

设$T\in\mathcal{L}(V,W)$，定义 $\tilde{T}: V/(\mathrm{null}\,T)\to W$，$\tilde{T}(v+\mathrm{null}\,T)=Tv$.

① $\tilde{T}$为线性映射 ② $\tilde{T}$为单的，$\mathrm{null}\,\tilde{T}=\{0\}$.

③ $\mathrm{range}\,\tilde{T}=\mathrm{range}\,T$，④ $V/(\mathrm{null}\,T)$同构于$\mathrm{range}\,T$（维数）

对偶 （对应矩阵的转置

线性泛函：$\mathcal{L}(V,F)$中的元素

对偶空间：$V'=\mathcal{L}(V,F)$ $\dim V'=\dim V$

对偶基：$v_1\cdots v_n$为V的基，定义 $\varphi_i(v_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

则 $\varphi_1\cdots\varphi_n$为V'的一组基

对偶映射，$T\in\mathcal{L}(V,W)$，则$T'\in\mathcal{L}(W',V')$

对$\forall\varphi\in W'$，$T'(\varphi)=\varphi\circ T$

$(S+T)'=S'+T'$

$(\lambda T)'=\lambda T'$

$(S\circ T)'=T'\circ S'$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathrm{dual}"'] & W \arrow[d, "\mathrm{dual}"] \\ V' & W' \arrow[l, "T'"] \end{tikzcd}$$

零化子：

设$U\le V$，称$U^0=\{\varphi\in V'\mid\forall u\in U,\varphi(u)=0\}$为U的零化子

U^0是V'的子空间

定理

设 $V=U_1\oplus U_2$，则 $V'=U_1^0\oplus U_2^0$，且$U_1^0=U_2'$，$U_2^0=U_1'$

$\dim U^0=\dim V-\dim U$ ，$(U^0)^0=U$

显然有 ① $T\in(\mathrm{null}\,T)^0$

设$T\in\mathcal{L}(V,W)$，则 （有限维）

① $\mathrm{null}\,T'=(\mathrm{range}\,T)^0$

② $\dim\mathrm{null}\,T'=\dim\mathrm{null}\,T+\dim W-\dim V$

③ $\dim\mathrm{range}\,T'=\dim\mathrm{range}\,T$

④ $\mathrm{range}\,T'=(\mathrm{null}\,T)^0$

T是单的 $\iff$ T'是满的 （有限维）

T是满的 $\iff$ T'是单的

$(V/W)'=W^0$

多项式

复系数多项式一定有零点，且有唯一分解

$p(x)=a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_m)$

带余除法，$p=sq+r$ $\deg r<\deg s$

（p用s分解）

实多项式的复根成对出现

有理系数多项式有任意多次不可约的多项式

爱生斯坦判别法：

$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 其中$b_1\cdots b_n$最大公约数为1

$=\frac{r}{q}(b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0)$

若存在素数 p，满足 $p\nmid b_n$，$p\mid b_i$，$0\le i\le n-1$

$p^2\nmid b_0$

则$f(x)$是不可约的.

不变子空间

设$T\in\mathcal{L}(V)$，$U\subseteq V$，若$\forall\alpha\in U$，均有$T\alpha\in U$，则称U为T的不变子空间

V的子空间在T下不变 ①$\{0\}$ ②V ③$\text{null}\,T$ ④$\text{range}\,T$

下列条件等价

①λ为T本征值 ②$T-\lambda I$不是单射的

③$T-\lambda I$不是满射的 ④$T-\lambda I$不可逆

限制算子，U为T的不变子空间

$$T|_U: U\to U,\quad u\mapsto Tu$$

商算子：$T/U: V/U\to V/U$

$$v+U\mapsto Tv+U$$

多项式乘积

$(pq)(T)=(qp)(T)=p(T)q(T)=q(T)p(T)$

有限维复空间(非$\{0\}$)上所有算子都有本征值.

定理：上三角矩阵的条件

$T\in\mathcal{L}(V)$，$\dim V=n$，$v_1\cdots v_n$为V的基，以下等价：

①T关于$v_1\cdots v_n$的矩阵是上三角

②$\forall j\ge 1$，$Tv_j\in\text{span}\{v_1\cdots v_j\}$

③$\forall j\ge 1$，$\text{span}\{v_1\cdots v_j\}$在$T$下不变

$V(\mathbb{C})$，$\dim V<\infty$，$T\in\mathcal{L}(V)$，T关于V某组基有上三角矩阵.

上三角矩阵对角元是本征值，

空本征空间$E(\lambda,T)$

$E(\lambda,T)=\text{null}(T-\lambda I)=V_\lambda=\{\alpha\in V\mid T\alpha=\lambda\alpha\}$

本征空间之和是直和

属于不同本征值的本征向量线性无关

可对角化：关于某组基有对角矩阵

等价条件：$\lambda_1\cdots\lambda_m$为互异的本征值

①T可对角化 ②V有本征向量构成的基

③V有一维不变子空间$U_1,\cdots,U_n$，有$V=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_n$

④$V=E(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_m,T)$

⑤$\dim V=\dim E(\lambda_1,T)+\cdots+\dim E(\lambda_m,T)$

复向量空间上的算子

$T\in\mathcal{L}(V)$，则$\{0\}=\text{null}\,T^0\subset\text{null}\,T^1\subset\cdots\subset\text{null}\,T^k\subset\text{null}\,T^{k+1}\subset$

设m使得$\text{null}\,T^m=\text{null}\,T^{m+1}$，则

$\text{null}\,T^m=\text{null}\,T^{m+1}=\cdots$

令$n=\dim V$，则$\text{null}\,T^n=\text{null}\,T^{n+1}=\cdots$

$V=\text{null}\,T^n\oplus\text{range}\,T^n$

广义本征向量：v

$v\ne 0$且$\exists j\in\mathbb{N}$，s.t. $(T-\lambda I)^j v=0$，

广义本征空间：$G(\lambda,T)=\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}$

属于不同本征值的本征向量线性无关 $\Longrightarrow$ 组成一组基.

性质：广义本征空间在T下不变 $(G(\lambda,T))$

证：$v=0$，显然，$Tv=0\in G(\lambda,T)$

$v\ne0$，令$w=(T-\lambda I)^k v\ne 0$，且$0=(T-\lambda I)^{k+1}v=(T-\lambda I)w$

则$Tw=\lambda w$，从而

从而$(T-\lambda I)^n w=(T-\lambda I)^n v=0\Rightarrow w\in\text{null}(T-\lambda I)^{n+k}\subset\text{null}(T-\lambda I)^n=G(\lambda,T)$

即Tv

幂零算子：$\exists k\ge1$，$N^k=0$；$N^{\dim V}=0$

有V上一组基使N的矩阵为$\begin{pmatrix}0&&*\\&\ddots&\\0&&0\end{pmatrix}$对角线及下方都是0.

对多项式$p(T)$，$\text{range}\,p(T)$与$\text{null}\,p(T)$都在T下不变

设$V(\mathbb{C})$，$T\in\mathcal{L}(V)$，$\lambda_1\cdots\lambda_m$为T互异的本征值，则

①$V=G(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus G(\lambda_m,T)$

②每个$G(\lambda_j,T)$都在T下不变 $1\le j\le n$.

③每个$(T-\lambda_j I)|_{G(\lambda_j,T)}$都是幂零的

λ的代数重数$=\lambda$的重数$=\dim G(\lambda,T)$

λ的几何重数$=\dim E(\lambda,T)$

代数重数之和$=\dim V$.（复空间上）

取$G(\lambda_i,T)$的基组合成V的基，则T在这组基下有分块对角矩阵$\begin{pmatrix}A_1&&0\\&\ddots&\\0&&A_m\end{pmatrix}$，其中每一块都是上三角的$A_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&&*\\&\ddots&\\0&&\lambda_i\end{pmatrix}$

（其中A_i的维数是λ_i的重数）

设$N\in\mathcal{L}(V)$幂零，则$(I+N)$有平方根（实、复都有）

（考虑$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots$，$N$幂零即$x\to0$）

设$V(\mathbb{C})$，$T\in\mathcal{L}(V)$可逆，则T有平方根.

T可对角化$\Longleftrightarrow$对所有λ_i，$E(\lambda_i,T)=G(\lambda_i,T)$

内积

①正性 $\langle v,v\rangle \geq 0$,

②定性 $\langle v,v\rangle = 0 \iff v=0$

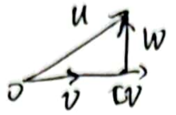
③对第一个位置线性性.

④共轭对称性 $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

勾股：若 $\langle u,v\rangle = 0$，$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Cauchy-Schwarz: $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

正交分解：$\forall u, v \in V, v \neq 0$. 令



令 $c = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$, $w = u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} v$.

$\langle w,v\rangle = 0$，且 $u = cv + w$

三角不等式 $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

规范正交基：$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$

$v = \langle v,e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle v,e_n\rangle e_n$

$\|v\|^2 = |\langle v,e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v,e_n\rangle|^2$

斯密特正交化：$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

$e_j = \frac{v_j - \langle v_j,e_1\rangle e_1 - \cdots - \langle v_j,e_{j-1}\rangle e_{j-1}}{\| \quad \|}$ (上方的内积)

若T关于V某组基有上三角矩阵，则也关于某个规范正交基有上三角矩阵

舒尔定理：复空间上T一定关于某个规范正交基有上三角矩阵 ($\dim V < \infty$)

里斯表示定理：设 $V(\mathbb{C})$ 且 $\dim V < \infty$，则对任意 $\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$，$\exists$ 唯一的 $u \in V$，使 $\varphi(v) = \langle v, u\rangle$，$\forall v \in V$.

$u = \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \cdots + \overline{\varphi(e_n)} e_n$

正交补：$U^\perp$，

设 $U \subseteq V$，$U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U, 均有 \langle u,v\rangle = 0\}$

性质①若 $U \subseteq V$，则 $U^\perp \subseteq V$ ② $\{0\}^\perp = V$ ③ $V^\perp = \{0\}$

④ $U \subseteq V$，则 $U \cap U^\perp = \{0\}$

⑤ $U, W \subseteq V$，且 $U \subset W$，则 $W^\perp \subset U^\perp$

$U \subseteq V$ 且 $\dim U < \infty$，则 $V = U \oplus U^\perp$

$\dim U^\perp = \dim V - \dim U$，$(U^\perp)^\perp = U$

正交投影，设 $U \subseteq V$，$\dim U < \infty$，$\forall v \in V$，可分解为 $v = \underset{U}{u} + \underset{U^\perp}{w}$

定义 $P_U : V \to U$，$P_U(v) = u$.

性质① $P_U \in \mathcal{L}(V)$，② $\forall u \in U, P_U u = u$ ③ $\forall w \in U^\perp, P_U(w) = 0$.

④ $\operatorname{range} P_U = U$，⑤ $\operatorname{null} P_U = U^\perp$ ⑥ $v - P_U(v) = w \in U^\perp$

⑦ $P_U^2 = P_U$，⑧ $\|P_U(v)\| \leq \|v\|$

到子空间U的最小距离，

$\|v - P_U v\| \leq \|v - u\|$，等号成立当且仅当 $u = P_U(v)$

内积空间上的算子

定义：伴随算子 T^*，$T \in \mathcal{L}(V,W)$，$T^* \in \mathcal{L}(W,V)$

$\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^* w\rangle$

性质① $(S+T)^* = S^* + T^*$ ② $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

③ $(T^*)^* = T$ ④ $I^* = I$ ⑤ $(ST)^* = T^* S^*$

设 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，则：(对偶的)

① $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{range} T)^\perp$ ② $\operatorname{range} T^* = (\operatorname{null} T)^\perp$

③ $\operatorname{null} T = (\operatorname{range} T^*)^\perp$ ④ $\operatorname{range} T = (\operatorname{null} T^*)^\perp$

T^* 的矩阵是T矩阵的共轭转置.

自伴算子：若 $T = T^*$，即 $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$ 则称T是自伴的.

自伴算子的本征值都是实的

若 $\forall v \in V$，均有 $\langle Tv, v\rangle = 0$，则 $T = 0$.（复空间）

$\langle Tu, w\rangle = \frac{1}{4}[\langle T(u+w), u+w\rangle - \langle T(u-w), u-w\rangle] + \frac{i}{4}[\langle T(u+iw), u+iw\rangle - \langle T(u-iw), u-iw\rangle]$

在复数域上，T是自伴 $\iff \forall v \in V$，均有 $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$

若T自伴且 $\langle Tv, v\rangle = 0$，则 $T = 0$（在实数域上需要加强条件）

正规：$TT^* = T^*T$

T是正规的 $\iff \forall v \in V$，$\|Tv\| = \|T^*v\|$

$\Downarrow$ T与 T^* 有相同本征向量，本征值互为互轭.
(λ) $(\bar{\lambda})$

若 $T \in \mathcal{L}(V)$ 正规，则T的对不同本征值的本征向量正交.

$Tv_1 = \lambda_1 v_1$，$Tv_2 = \lambda_2 v_2 \Rightarrow \langle v_1, v_2\rangle = 0$.

谱定理：

复谱：下列条件等价

① T正规 ② V有由T的本征向量组成的规范正交基

③ T关于V某组规范正交基有对角矩阵.

实谱：

① T是自伴（条件更强）

②③与复谱相同.

若 $T \in \mathcal{L}(V)$ 自伴，$b^2 < 4c$ 且 $T^2 + bT + cI$ 可逆

T是自伴，则T有本征值.

特征多项式

$V(\mathbb{C})$, $T\in\mathcal{L}(V)$, 设$\lambda_1\cdots\lambda_m$为T所有互异的本征值, $d_1\cdots d_m$为其重数, 则$(z-\lambda_1)^{d_1}\cdots(z-\lambda_m)^{d_m}$为特征多项式

记T的特征多项式为$q(x)$, 则$q(T)=0$ (看成线性映射)

首一多项式：最高次项的系数为1

极小多项式：唯一使$p(T)=0$的次数最小的首一多项式p.

设$T\in\mathcal{L}(V)$, $p,q\in\mathcal{P}(F)$, 若$p(x)$为T的极小多项式, 若$q(T)=0$,
则$p(x)\mid q(x)$, 即$q(x)$是$p(x)$的倍式.
$\Leftrightarrow \exists h(x)$, s.t. $q(x)=h(x)\cdot p(x)$

因而特征多项式是极小多项式的倍式

T的极小多项式的零点恰为T的特征值, 即$p(\lambda_i)=0$.

Jordan标准形

若$N\in\mathcal{L}(V)$是幂零, 则$\exists v_1\cdots v_n\in V$与非负整数$m_1\cdots m_n$
使得 ① $N^{m_1}v_1\cdots Nv_1, v_1, \cdots N^{m_n}v_n\cdots Nv_n, v_n$是$V$的基
② $N^{m_1+1}v_1=N^{m_2+1}v_2=\cdots=N^{m_n+1}v_n=0$

Jordan基

$T\in\mathcal{L}(V)$, V的一组基称为Jordan基, 若在这组基下T有分块多对角矩阵$\begin{pmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_m\end{pmatrix}$, 其中$A_j$为Jordan块$\begin{pmatrix}\lambda_j & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_j\end{pmatrix}$
(不同的Jordan块可能对应相同的本征值)

在复数域上, V一定有一组基是Jordan基
$\Downarrow$, 任何一个矩阵一定相似于一个Jordan标准形

设$\dim V=n$, 若T的秩为$r(T)$, 则有$n-r(T)$块Jordan块

t阶Jordan块个数: $r(T^{t+1})+r(T^{t-1})-2r(T^t)$

分块对角矩阵的特征多项式等于每一块的特征多项式的乘积
极小多项式

对$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&\\&0&1\\&&0\end{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & \begin{pmatrix}0&1\\&0\end{pmatrix} & 0\\ 0 & 0 & (0)\end{pmatrix}$ 特征: λ^6, 极小: λ^6

$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\&2\end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix}3&1\\&3\end{pmatrix} & & \\ & & \begin{pmatrix}2&1&&\\&2&1&\\&&2&1\\&&&2\end{pmatrix} & \\ & & & (3)\end{pmatrix}$ 特征$(\lambda-2)^7(\lambda-3)^3$, 极小$(\lambda-2)^4(\lambda-3)^2$

特征：所有Jordan块
极小：不同本征值Jordan块中最大的.